www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

emc groupe iecs

CONCOURS 1989

MATHEMATIQUES

Régime économique

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 6

– Exercice I –

A.) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $u \in \mathbf{R}$. On pose

$$s_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^n u^n$$

et $$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{u^{k+1}}{k+1} = u - \frac{u^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

1) a) Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R} - \{-1\} \quad \frac{1}{1+t} = s_n(t) + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

b) Exprimer pour $u \in \mathbf{R} - \{-1\}$ $S_n'(u)$ en fonction de $s_n(u)$ et en déduire que

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt.$$

2) On fixe $x \in [0, 1]$. Justifier le fait que pour $t \in [0, x]$ on a $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$ et montrer que

$$\frac{x^{n+2}}{(1+x)(n+2)} \leq |\ln(1+x) - S_n(x)| \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

En déduire que $$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \ln(1+x).$$

3) On fixe maintenant $x \in]-1, 0[$.

a) Montrer que $$(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = -\int_0^{-x} \frac{u^{n+1}}{1-u} du.$$

b) Soit g la fonction définie sur $[0, 1[$ par la relation $g(u) = \frac{1}{1-u}$. Justifier le fait que pour $u \in [0, -x]$ on a $g(0) \leq g(u) \leq g(-x)$ et montrer que

$$\frac{(-x)^{n+2}}{n+2} \leq |\ln(1+x) - S_n(x)| \leq \frac{(-x)^{n+2}}{(1+x)(n+2)}.$$

c) Montrer que pour $x \in]-1, 0[$ on a $\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \ln(1+x)$.

4) Afin de calculer une valeur approchée de ln 2 on envisage, a priori, de calculer $S_n(1)$ pour n assez grand.
Quelle valeur minimale de n faudrait-il considérer si

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| < 10^{-6} ?$$

(On pourra utiliser le 2) .

5) On décide de chercher des formules nécessitant le calcul d'un nombre moins élevé de termes.

a) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que

$$\ln(1+x) - \ln(1-y) = \ln 2 \Longleftrightarrow x + 2y = 1 \text{ et } x > -1.$$

b) Soit $q \in]0, 1[$ un réel fixé et soit h_q la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par la relation $h_q(t) = \frac{q^t}{t}$. Montrer que h_q décroit strictement sur $\mathbf{R}^{+*}$.
Déterminer $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{5(\frac{1}{3})^{n+2}}{2} < 4.10^{-3}.$$

Donner des valeurs décimales approchant $S_N(\frac{1}{3})$ et $S_N(-\frac{1}{3})$ à 10^{-7} au plus près. (On négligera les erreurs d'arrondi de la calculatrice).
En déduire une valeur décimale approchant ln 2 à $2,5.10^{-7}$ près.

B.) Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et $w_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$.

1) Déduire du A.) 2) que $\forall n \in \mathbf{N}$ $w_n \geq \frac{1}{2}[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+2}]$.

2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}^+$ $x \geq \ln(1+x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}$ $w_n \geq \frac{1}{2} \ln \frac{n+3}{2}$, et la valeur de $\lim_{n \to +\infty} w_n$.

3) a) A l'aide des A.) 1) a) et b), montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad v_n = \int_0^1 \frac{-t}{1+t} \left[\frac{1 + (-1)^n t^{n-1}}{1+t} \right] dt.$$

b) Pour $n \in \mathbf{N}$ on note $$a_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(1+t)^2} dt.$$

Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}$ $|a_n| \leq \frac{1}{n+3}$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

4) a) Soient $$I = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Calculer J, $I + J$, I.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} v_n$.

TSVP

– Exercice II –

On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier la relation $A^2 - 5A + 6I = 0_3$.

2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

3) Montrer que $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbf{R}^2,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.
(On déterminera une relation de récurrence exprimant α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n et on donnera les valeurs de α_1 et de α_0)

4) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \alpha_{n+1} - 2\alpha_n$ et $v_n = \alpha_{n+1} - 3\alpha_n$.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont géométriques, et en déduire α_n en fonction de n.

5) Pour $n \in \mathbf{N}$ exprimer A^n en fonction de n.

– Exercice III –

Un joueur joue avec 2 dés équilibrés.

sur le dé n°1 :
- 3 faces portent l'inscription + 10
- 2 faces portent l'inscription − 80
- 1 face porte l'inscription + 120

sur le dé n°2 :
- 1 face porte l'inscription + 10
- 3 faces portent l'inscription − 80
- 2 faces portent l'inscription + 120.

Quand le joueur joue avec l'un des dés, il gagne la somme indiquée sur la face tirée (un "gain" de $-80F$ signifiant une perte de $80F$).
On note X (respectivement Y) la variable aléatoire : gain en jouant avec le dé n°1 (respectivement n°2).

1) a) Déterminer les lois de probabilité de X et de Y.

b) Calculer $p(X > 0)$, $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

c) Calculer $p(Y > 0)$, $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Dans les questions qui suivent, le joueur joue une succession de coups en adoptant la règle suivante :

s'il gagne de l'argent à un coup, il joue celui d'après avec le dé n°2,
s'il perd de l'argent à un coup, il joue celui d'après avec le dé n°1.

Le 1er coup se joue avec le dé n°1.

2) On note A_n l'événement : "gagner de l'argent au $n^{\text{ième}}$ coup", pour $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Calculer $p(A_1)$.

b) Calculer $p(A_2)$.

c) Trouver une relation entre $p(A_{n+1})$ et $p(A_n)$. En déduire l'expression de $p(A_n)$ en fonction de n et calculer $\lim_{n\to+\infty} p(A_n)$.

3) Au $2^{\text{ème}}$ coup le joueur gagne $120F$. Déterminer la probabilité α_2 qu'il ait gagné cette somme en jouant avec le dé $n°$ 2.

4) Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

a) Au $n^{\text{ième}}$ coup, le joueur gagne $120F$. Déterminer la probabilité α_n qu'il ait gagné cette somme en jouant avec le dé $n°$ 2.

b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail